28.12.23 математика 2ст

Тема: « Основные тригонометрические тождества»

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \frac{1}{tg^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \sin\alpha \neq 0$$

$$tg\,\alpha \bullet ctg\,\alpha = 1, \quad \sin\alpha \neq 0, \quad \cos\alpha \neq 0$$

Задача 1 Доказать, что при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, справедливо равенство

$$1 + ctg^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (1)$$

▶ По определению $ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, и поэтому

$$1 + ctg^2\,\alpha = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

.

Задача 2 Доказать тождество

$$\cos^2\alpha = (1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha).$$

▶ $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha) = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$. ◁

Задача 3 Доказать тождество $\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} = \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}$.

▶ Чтобы доказать это тождество, покажем, что разность между его левой и правой частями равна нулю:

$$\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} - \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - (1 - \sin^2\alpha)}{\cos\alpha\,(1 - \sin\alpha)} =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha\,(1 - \sin\alpha)} = 0. \text{ ◁}$$

Задача 4 Доказать тождество $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$.

► $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\dfrac{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$

$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=$
$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$

Тождество доказано, так как его левая и правая части равны $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$. ◁

Задача 5 Упростить выражение $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$.

► $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\dfrac{1}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=$

$=\sin\alpha\cos\alpha.$ ◁

Выполнить по образцу:

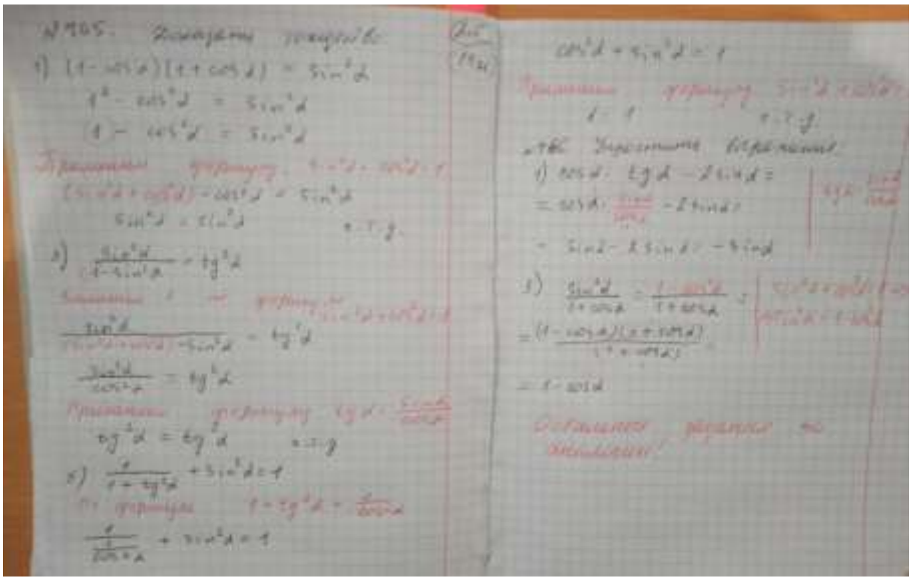
Упражнения

465 Доказать тождество:

1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\sin^2\alpha$;
2) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=\cos^2\alpha$;
3) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$;
4) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\alpha$;
5) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\sin^2\alpha=1$;
6) $\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}+\cos^2\alpha=1$.

466 Упростить выражение:

1) $\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha-2\sin\alpha$;
2) $\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$;
3) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$;
4) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$.



Тема: «Формулы приведения»

§ 31 Формулы приведения

Таблицы значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса составляются для углов от 0° до 90° (или от 0 до $\frac{\pi}{2}$). Это объясняется тем, что их значения для остальных углов сводятся к значениям для острых углов.

Задача Вычислить $\sin 870°$ и $\cos 870°$.

▶ Заметим, что $870° = 2 \cdot 360° + 150°$. Следовательно, при повороте точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на 870° точка совершит два полных оборота и ещё повернётся на угол 150°, т. е. получится та же самая точка M, что и при повороте на 150° (рис. 66). Поэтому $\sin 870° = \sin 150°$, $\cos 870° = \cos 150°$.

Построим точку M_1, симметричную точке M относительно оси OY (рис. 67). Ординаты точек M и M_1 одинаковы, а абсциссы различаются только знаком. Поэтому $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ $\sin 870° = \frac{1}{2}$, $\cos 870° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ◁

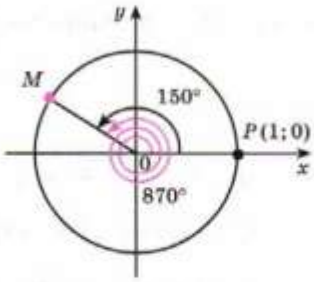


Рис. 66

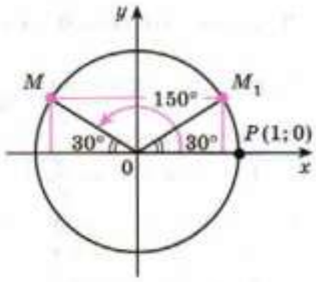


Рис. 67

При решении задачи 1 использовались равенства

$$\sin(2 \cdot 360° + 150°) = \sin 150°,$$
$$\cos(2 \cdot 360° + 150°) = \cos 150°, \quad (1)$$

$$\sin(180° - 30°) = \sin 30°,$$
$$\cos(180° - 30°) = -\cos 30°. \quad (2)$$

Функция	Аргумент β						
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\,\beta$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$
$ctg\,\beta$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$ctg\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Для образца:

① Вычислить:

$$\cos 150^\circ = \cos\frac{5\pi}{6} =$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

По таблице:

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

② 1) Упростить:

$$\frac{ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - tg(\pi+\alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)} =$$

$$= \frac{tg\,\alpha - tg\,\alpha - \cos\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{-\cos\alpha}{-\cos\alpha} = 1$$

Дальше по аналогии!

Самостоятельно!

1. **Вычислить:**

Вычислить с помощью формулы приведения

1) $\cos 150°$; 2) $\sin 135°$; 3) $\operatorname{ctg} 135°$;

2. Упростить:

1) $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{tg}(\pi+\alpha)+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

1) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$;